CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**A.B.A.U.** **Convocatoria ordinaria 2024** **FÍSICA**	**Código: 23**

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que podrá responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

PREGUNTA 1. Interacción electromagnética. Responda indicando y justificando la opción correcta. **(2 puntos)**
1.1. Una partícula tiene una carga de 5 nC y penetra en una región del espacio donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 0,6\ \overline{\mathbf{i}}$ T con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}} = 8·10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ m·s⁻¹, describiendo una circunferencia de 2 µm de radio. El valor de la masa de la partícula es: A) $7,5×10^{-22}$ kg; B) $4,5×10^{-22}$ kg; C) $2,5×10^{-22}$ kg.
1.2. En una región del espacio, en la que el potencial eléctrico es constante, la intensidad de campo eléctrico es: A) constante; B) nula; C) tiene un valor que depende del punto considerado.

PREGUNTA 2. Ondas y óptica geométrica. Responda indicando y justificando la opción correcta. **(2 puntos)**
2.1. La velocidad de una onda en un punto del espacio: A) varía con la fase en la que se encuentre el punto; B) varía con la distancia del punto al origen; C) varía al cambiar el medio de propagación.
2.2. El período de un péndulo es de 1 s. Si duplicamos la longitud del péndulo, el nuevo valor del período será: A) 1/2 s; B) $\sqrt{2}$ s; C) 2 s.

PREGUNTA 3. Física del siglo XX. Responda indicando y justificando la opción correcta. **(2 puntos)**
3.1. Se ilumina el cátodo de una célula fotoeléctrica con una radiación de frecuencia $1,6×10^{15}$ Hz y el potencial de frenado es de 2 V. Si usamos una luz de 187,5 nm, el potencial de frenado será: A) menor; B) mayor; C) igual.
DATO: $c = 3,0×10^8$ m·s⁻¹.
3.2. Una nave espacial viaja a una velocidad uniforme 0,866 *c* relativa a la Tierra. Si un observador de la Tierra registra que la nave en movimiento mide 100 m, ¿cuánto medirá la nave para su piloto?: A) 50 m; B) 100 m; C) 200 m.
Nota: *c* es la velocidad de la luz en el vacío.

PREGUNTA 4. Práctica de interacción gravitatoria. (2 puntos)
a) A partir de los siguientes datos de satélites que orbitan alrededor de la Tierra determine el valor de la masa de la Tierra.
b) Si el valor indicado en los libros de texto para la masa de la Tierra es de $5,98×10^{24}$ kg, ¿qué incertidumbre relativa obtuvimos a partir del cálculo realizado?
DATO: $G = 6,67×10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

Satélites	Distancia media al centro de la Tierra / km	Período orbital medio /min
DELTA 1-R/B	7595	158
O3B PFM	14 429	288
GOES 2	36 005	1449
NOAA	7258	102

PREGUNTA 5. Problema de interacción gravitatoria. (2 puntos)
Una nave sitúa un objeto de 20 kg de masa entre la Tierra y el Sol en un punto donde la fuerza gravitatoria neta sobre el objeto es nula. Calcule en ese punto: a) la distancia del objeto al centro de la Tierra; b) la aceleración de la Tierra debida a la fuerza que el objeto ejerce sobre ella.
DATOS: $G = 6,67×10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; M(T) = $5,98×10^{24}$ kg; M(S) = $2,00×10^{30}$ kg; distancia Tierra-Sol = $1,50×10^{11}$ m.

PREGUNTA 6. Problema de interacción electromagnética. (2 puntos)
Una carga eléctrica puntual de valor Q ocupa la posición (0,0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial eléctrico es $V = -120$ V y el campo eléctrico es $\overline{\boldsymbol{E}} = -80\ \overline{\mathbf{i}}$ N /C. Si las coordenadas están dadas en metros, calcule: a) la posición del punto A y el valor de Q; b) el trabajo que realiza la fuerza eléctrica del campo para llevar un electrón desde el punto B (2,2) hasta el punto A.
DATOS: $K = 9×10^9$ N·m²·C⁻²; $|q_e| = 1,6×10^{-19}$ C.

PREGUNTA 7. Problema de ondas y óptica geométrica. (2 puntos)
Una coleccionista de monedas utiliza una lupa de distancia focal 5 cm para examinarlas de cerca. a) Calcule la distancia a la que tiene situar las monedas respecto de la lupa si quiere observarlas con un tamaño diez veces mayor. b) Represente aproximadamente el correspondiente diagrama de rayos e indique las posiciones y las características del objeto y de la imagen.

PREGUNTA 8. Problema de Física del siglo XX. (2 puntos)
Marie Curie recibió el Premio Nobel de Química en 1911 por el descubrimiento del radio. Si se hubiesen guardado ese año en su laboratorio 2,00 g de radio-226, calcule: a) la cantidad de radio que quedaría y la actividad de la muestra en la actualidad; b) los años que pasarían hasta que la muestra de radio se redujese al 1 % de su valor inicial.
DATOS: $N_A = 6,02×10^{23}$ partículas·mol⁻¹; tiempo de semidesintegración del radio = $1,59×10^3$ años.

Soluciones

1.1. Una partícula tiene una carga de 5 nC y penetra en una región del espacio donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 0{,}6\ \overline{\mathbf{i}}$ T con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}} = 8·10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ m·s⁻¹, describiendo una circunferencia de 2 µm de radio. El valor de la masa de la partícula es:
A) $7{,}5×10^{-22}$ kg.
B) $4{,}5×10^{-22}$ kg.
C) $2{,}5×10^{-22}$ kg.

(A.B.A.U. ord. 24)

Datos	***Cifras significativas: 2***
Carga de la partícula	$q = 5{,}0$ nC $= 5{,}0·10^{-9}$ C
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}} = 0{,}60\ \overline{\mathbf{i}}$ T
Velocidad de la partícula	$\overline{\boldsymbol{v}} = 8{,}0·10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s
Radio de la trayectoria circular	$R = 2{,}0$ µm $= 2{,}0·10^{-6}$ m
Incógnitas	
Masa de la partícula	m
Otros símbolos	
Valor de la fuerza magnética sobre la partícula	F_B
Vector fuerza eléctrica sobre la partícula	$\overline{\boldsymbol{F}}_{E.}$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga, q, que se desplaza en el interior de un campo magnético, $\overline{\boldsymbol{B}}$, con una velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N = \frac{v^2}{R}$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:

Como solo actúa la fuerza magnética, que es perpendicular a la velocidad, la partícula describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N.

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética:

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen}\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Si la partícula entra perpendicularmente al campo magnético, sen φ = 1.
Despejando la masa, m:

$$m = \frac{R \cdot q \cdot B}{v} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m}] \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-9}\ [\mathrm{C}] \cdot 0{,}60\ [\mathrm{T}]}{8{,}0 \cdot 10^6\ [\mathrm{m/s}]} = 7{,}5 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{kg}$$

Coincide con la opción A.

Análisis: La masa de esta partícula es $7{,}5·10^{-22} / 1{,}67·10^{-27} = 4{,}5·10^5$ *veces la masa del protón, y su carga vale* $5·10^{-9} / 1{,}6·10^{-19} = 3{,}1·10^{10}$. *No parece muy probable que una partícula pueda tener la carga de* 31 000 000 000 protones y la masa de solo 450 000. *Si lo comparamos con el positrón, (ya que su carga es positiva) la antipartícula del electrón, la relación de masas es* $7{,}5·10^{-22} / 9{,}1·10^{-31} = 7{,}9·10^8$ *veces la masa del positrón. Tampoco parece probable semejante concentración de antimateria. Repasando los cálculos, no parecen contener errores, así que supongo que la persona que redactó el ejercicio no eligió los valores adecuados.*

1.2. En una región del espacio, en la que el potencial eléctrico es constante, la intensidad de campo eléctrico es:
A) Constante.
B) Nula.
C) Tiene un valor que depende del punto considerado.

(A.B.A.U. ord. 24)

Solución: B

El campo eléctrico es el gradiente del potencial eléctrico: la variación del potencial eléctrico con respeto a la distancia. La expresión es:

$$\vec{E}=-\frac{d V}{d r}$$

En esa ecuación $\overline{E}$ es la intensidad del campo eléctrico, V es el potencial eléctrico, y r es la distancia.
El signo menos indica que el campo eléctrico va en la dirección de la disminución del potencial.
Si el potencial eléctrico es constante, su derivada con respeto a la distancia es cero. Por lo tanto, la intensidad del campo eléctrico es nula.

2.1. La velocidad de una onda en un punto del espacio:
A) Varía con la fase en la que se encuentre el punto.
B) Varía con la distancia del punto al origen.
C) Varía al cambiar el medio de propagación.

(A.B.A.U. ord. 24)

Solución: C

La velocidad de una onda depende de las propiedades del medio en el que se propaga. Por ejemplo, la velocidad del sonido varía dependiendo de si está en el aire, en el agua o en un sólido.

2.2. El período de un péndulo es de 1 s. Si duplicamos la longitud del péndulo, el nuevo valor del período será:
A) 1/2 s.
B) √2 s.
C) 2 s.

(A.B.A.U. ord. 24)

Solución: B

La ecuación del período de un péndulo de longitud L es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

En esta ecuación, L es la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y T es el período.
Sustituyendo los datos en los dos péndulos quedaría:

$$1=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{2\cdot L}{g}}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, quedaría:

$$\frac{T_2}{1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{2\cdot L}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}=\sqrt{2}$$

El período del péndulo, al tener el doble de longitud, valdría $\sqrt{2}$ = 1, 4 s.

3.1. Se ilumina el cátodo de una célula fotoeléctrica con una radiación de frecuencia $1{,}6\times10^{15}$ Hz y el potencial de frenado es de 2 V. Si usamos una luz de 187,5 nm, el potencial de frenado será:
A) Menor.

B) Mayor.
C) Igual.

DATO: c = 3,0×10⁸ m·s⁻¹. *(A.B.A.U. ord. 24)*

Solución: C

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).
Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.
Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.
La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación, E_f representa la energía del fotón incidente, W_e el trabajo de extracción del metal y E_c la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.
La energía que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E_f = h \cdot f$$

h es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s.
La frecuencia de una onda es inversamente proporcional su longitud de onda λ,

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Cuanto mayor sea su longitud de onda, menor será la frecuencia y menor será la energía del fotón.
La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e$$

La energía cinética E_c máxima de los electrones se escribe en función del potencial de frenado

$$E_c = |e| \cdot V$$

La ecuación de Einstein queda:

$$h \cdot f = W_e + |e| \cdot V$$

Por tanto, cuanto menor sea la frecuencia de la radiación, menor será la energía de los fotones y la energía cinética y el potencial de frenado de los electrones emitidos.
Con el dato de la velocidad de la luz en el vacío, se puede calcular la frecuencia correspondiente a la longitud de onda de 187,5 nm:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{187{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 1{,}6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Como la frecuencia es la misma, el potencial de frenado también valdrá lo mismo.

3.2. Una nave espacial viaja a una velocidad uniforme 0,866 c relativa a la Tierra. Si un observador de la Tierra registra que la nave en movimiento mide 100 m, ¿cuánto medirá la nave para su piloto?:
A) 50 m.
B) 100 m.
C) 200 m.
Nota: c es la velocidad de la luz en el vacío. *(A.B.A.U. ord. 24)*

Solución: C

La teoría de la relatividad especial dice que la longitud de un objeto que se mueve a velocidades próximas las de la luz, medida desde otro sistema en reposo, es menor que la que mediría un observador situado en ese objeto que se mueve. La longitud l', medida desde el sistema en reposo, viene dada por la expresión:

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Como el factor que contiene la raíz cuadrada es menor que 1, la longitud $l' < l$.
La contracción de la longitud afecta solo a la medida de la longitud que se mueve en la misma dirección, pero no a la de la altura, que es perpendicular a la dirección del movimiento.
Por lo tanto, la longitud (de la nave) para el piloto será mayor.
Se puede aplicar la ecuación para determinar el valor:

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}866\ c)^2}{c^2}} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}75 \cdot c^2}{c^2}} = l \cdot \sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \cdot l$$

$$l = \frac{100\ [\text{m}]}{0{,}5} = 200\ \text{m}$$

4. a) A partir de los siguientes datos de satélites que orbitan alrededor de la Tierra determine el valor de la masa de la Tierra.
b) Si el valor indicado en los libros de texto para la masa de la Tierra es de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg, ¿qué incertidumbre relativa obtuvimos a partir del cálculo realizado?
DATO: G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

Satélites	Distancia media al centro de la Tierra / km	Período orbital medio /min
DELTA 1-R/B	7595	158
O3B PFM	14 429	288
GOES 2	36 005	1449
NOAA	7258	102

(A.B.A.U. ord. 24)

Rta.: a) M = $3{,}63 \cdot 10^{24}$ kg; b) δ = 39 %.

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\ \pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$$

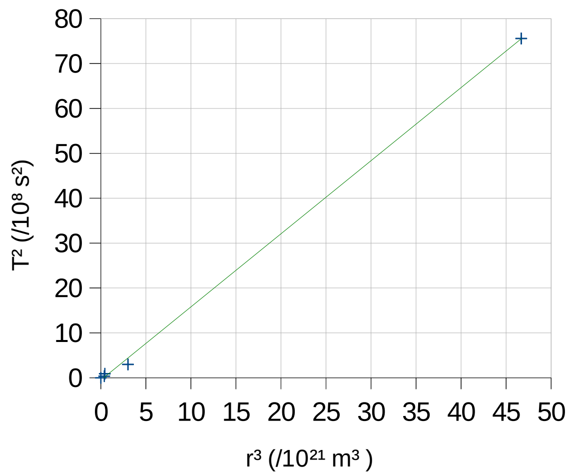
Reescribiendo esta ecuación para expresar la relación entre los cubos de los radios de las órbitas y los cuadrados de los períodos queda:

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{G\cdot M}{4\pi^2}$$

La pendiente de la recta de la gráfica obtenida en una hoja de cálculo es:

pendiente = $1{,}03\cdot 10^4$ km³/s² = $6{,}14\cdot 10^{12}$ m³/s²

Despejando la masa M de la Tierra queda:



$$M=\frac{4\pi^2\cdot pendiente}{G}=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 6{,}14\cdot 10^{12}\ [\mathrm{m^2/s^2}]}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]}=3{,}63\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Análisis: El resultado es bastante diferente al valor de los libros $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg, *aunque del mismo orden de magnitud.*

Pero en la prueba no disponemos de una hoja de cálculo. La pendiente de la recta dibujada en un papel puede aproximarse al cociente de los datos más altos:

$$\frac{r_4^3}{T_4^2}=\frac{4{,}67\cdot 10^{13}\ [\mathrm{km}]^3}{2{,}10\cdot 10^6\ [\mathrm{min}]^2}=2{,}22\cdot 10^7\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}\ \frac{(10^3\ \mathrm{m})^3}{(1\ \mathrm{km})^3}=6{,}18\cdot 10^{12}\ \mathrm{m^3/s^2}$$

Que es casi el mismo resultado que la pendiente obtenida en la hoja de cálculo.

Otro valor similar al de la pendiente sería el promedio de los cocientes.

	T^2	r^3	r^3/T^2
Satélite	(s²)	(m³)	(m³/s²)
DELTA 1-R/B	$8{,}99\cdot 10^7$	$4{,}38\cdot 10^{20}$	$4{,}87\cdot 10^{12}$
O3B PFM	$2{,}99\cdot 10^8$	$3{,}00\cdot 10^{21}$	$1{,}01\cdot 10^{13}$
GOES 2	$7{,}56\cdot 10^9$	$4{,}67\cdot 10^{22}$	$6{,}18\cdot 10^{12}$
NOAA	$3{,}75\cdot 10^7$	$3{,}82\cdot 10^{20}$	$1{,}02\cdot 10^{13}$

r^3/T^2 (media) = $7{,}83\cdot 10^{12}$ m³/s²

El valor medio es $7{,}83\cdot 10^{12}$ m³/s² que daría una masa de la Tierra:

$$M=\frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2}=\frac{4\cdot 3{,}14^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]}\cdot 7{,}83\cdot 10^{12}\ [\mathrm{m^2/s^2}]=4{,}63\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Este valor es bastante diferente al de la pendiente, lo que hace sospechar de la validez de los datos.

b) La incertidumbre es el cociente de la diferencia entre el valor calculado y el «correcto» entre el valor «correcto»:

$$\delta=\frac{|M_{\mathrm{calc}}-M|}{M}=\frac{|3{,}63\cdot 10^{24}-5{,}98\cdot 10^{24}|}{5{,}98\cdot 10^{24}}=0{,}39=39\ \%$$

Análisis: Resolví el ejercicio con la hoja de cálculo [Física Lab (es)] pero la incertidumbre obtenida, ¡era del 39 %! Buscando en la web encontré un error en el radio medio de los satélites GOES. Resulta que son satélites geoestacionarios, pero la distancia que da el enunciado del problema es: ¡la altura! en vez de la distancia al centro de la Tierra.
Los datos del satélite DELTA 1-R/B no coinciden con los de la página web: [DELTA 1 R/B Satellite details 1969-101B NORAD 4251 (n2yo.com)], ni el período (312 min) ni el radio promedio de la órbita (en la página no da el valor del radio promedio, sino el perigeo, 375 km, y el apogeo, 17 342 km, pero el promedio de estos valores es 8860 km). Sustituí los valores del enunciado por los de la página web, y entonces la incertidumbre fue del 0,7 %.

5. Una nave sitúa un objeto de 20 kg de masa entre la Tierra y el Sol en un punto donde la fuerza gravitatoria neta sobre el objeto es nula. Calcula en ese punto:
   a) La distancia del objeto al centro de la Tierra.
   b) La aceleración de la Tierra debida a la fuerza que el objeto ejerce sobre ella.
   DATOS: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; M(T) = 5,98×10²⁴ kg; M(S) = 2,00×10³⁰ kg;
   distancia Tierra-Sol = 1,50×10¹¹ m. *(A.B.A.U. ord. 24)*
   Rta.: a) r = 2,59·10⁸ m; b) a = 1,99·10⁻²⁶ m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Tierra	$M(\mathrm{T}) = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg
Masa del Sol	$M(\mathrm{S}) = 2{,}00\cdot 10^{30}$ kg
Masa del objeto	$m = 20{,}0$ kg
Distancia Tierra-Sol	$d = 1{,}50\cdot 10^{11}$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Incógnitas	
Distancia del objeto al centro de la Tierra.	r
Aceleración de la Tierra debida a la fuerza que el objeto ejerce sobre ella	*la*
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal. (Fuerza entre cuerpos esféricos o puntuales)	$\vec{F}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$

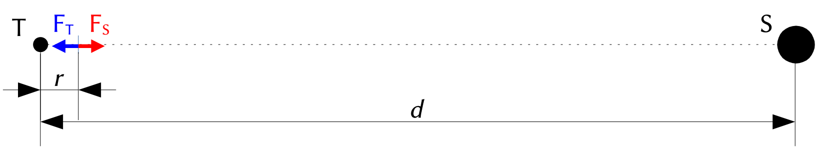
Solución:

a) La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas, M y m, viene dada por la ley de la gravitación de Newton. G es la constante de la gravitación universal y $\vec{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Se escribe la ecuación de la fuerza gravitatoria sobre el objeto, que es nula;

$$-G\frac{M(\mathrm{S})\cdot m}{(d-r)^2}\vec{u}_{r\mathrm{S}}+\left(-G\frac{M(\mathrm{T})\cdot m}{r^2}\vec{u}_{r\mathrm{T}}\right)=\vec{0}$$



Se elige un sistema de coordenadas con la Tierra en el origen, porque el punto donde se anula la fuerza tiene que estar mucho más cerca de la Tierra que del Sol, que tiene una masa mucho mayor. El Sol se sitúa en un punto del sentido positivo del eje *X*.

El vector unitario de la posición del Sol en este sistema $\vec{u}_{rS}$ es el vector $\vec{\mathbf{i}}$, unitario del eje *X* en sentido positivo. El vector unitario de la Tierra $\vec{u}_{rT}$, tomando el Sol como origen, es el vector unitario contrario -$\vec{\mathbf{i}}$.

Se sustituyen los vectores unitarios en la ecuación y se reordena:

$$-G\frac{M(\mathrm{S})\cdot m}{(d-r)^2}\vec{\mathbf{i}}+\left(-G\frac{M(\mathrm{T})\cdot m}{r^2}(-\vec{\mathbf{i}})\right)=0\,\vec{\mathbf{i}}$$

$$-\cancel{G}\frac{M(\mathrm{S})\cdot \cancel{m}}{(d-r)^2}+\cancel{G}\frac{M(\mathrm{T})\cdot \cancel{m}}{r^2}=0$$

$$\frac{M(\mathrm{S})}{(d-r)^2}=\frac{M(\mathrm{T})}{r^2}\Rightarrow (d-r)^2=\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}r^2\Rightarrow d-r=\sqrt{\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}}r\Rightarrow d=r\left(1+\sqrt{\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}}\right)$$

Se despeja *r* y se sustituyen los valores:

$$r=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}}}=\frac{1{,}50\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1+\sqrt{\frac{2{,}00\cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{5{,}98\cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}]}}}=2{,}59\cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$$

Análisis: La distancia obtenida es mucho menor que la que hay entre el Sol y la Tierra y el punto se sitúa cerca de la Tierra.

b) Se aplica a 2.ª ley de Newton de la Dinámica en módulos y se despeja la aceleración que produce la masa de 20 kg sobre el planeta Tierra:

$$a=\frac{F}{M(\mathrm{T})}=\frac{G\frac{m\cdot \cancel{M(\mathrm{T})}}{r^2}}{\cancel{M(\mathrm{T})}}=G\frac{m}{r^2}=6{,}667\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{20\ [\mathrm{kg}]}{(2{,}59\cdot 10^{8}\ [\mathrm{m}])^2}=1{,}99\cdot 10^{-26}\ \mathrm{m/s^2}$$

6. Una carga eléctrica puntual de valor *Q* ocupa la posición (0,0) del plano *XY* en el vacío. En un punto A del eje *X* el potencial eléctrico es $V = -120$ V y el campo eléctrico es $\overline{\boldsymbol{E}} = -80\ \bar{\mathbf{i}}$ N /C. Si las coordenadas están dadas en metros, calcula:
   a) La posición del punto A y el valor de *Q*.
   b) El trabajo que realiza la fuerza eléctrica del campo para llevar un electrón desde el punto B (2,2) hasta el punto A.
   DATOS: $K = 9\times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$; $|q_e| = 1{,}6\times 10^{-19}$ C. *(A.B.A.U. ord. 24)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{r}}_A = (1{,}50,\ 0)$ m; $Q = -20{,}0$ nC; b) $W_{B\to A} = -9{,}02\cdot 10^{-18}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga *Q*	$\overline{\boldsymbol{r}}_O = (0,\ 0)$ m
Potencial eléctrico en el punto A	$V_A = -120$ V
Campo eléctrico en el punto A	$\overline{\boldsymbol{E}} = -80{,}0\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (2{,}00,\ 2{,}00)$ m
Carga del electrón	$q_p = -1{,}60\cdot 10^{-19}$ C
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$
Valor de la carga *Q*	Q
Trabajo de la fuerza del campo al llevar un electrón del punto B al punto A	$W_{B\to A}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$V=K\frac{Q}{r}$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Ecuaciones

Energía potencial eléctrica de una interacción entre dos cargas, Q y q, situadas a una distancia, r, una de la otra. $E_p = q \cdot V = K \frac{Q \cdot q}{r}$

Solución:

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

a) Se sustituyen los datos en la ecuación del campo eléctrico:

$$-80{,}0\,\vec{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Tomando solo el módulo, queda:

$$80{,}0\ [\text{N/C}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{|Q|}{r^2}$$

La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Se sustituye también en la ecuación de potencial eléctrico:

$$-120\ [\text{V}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{Q}{r}$$

Como en la ecuación del campo eléctrico aparece el valor absoluto de la carga, $|Q|$, se emplea la ecuación en valores absolutos:

$$120\ [\text{V}] = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{|Q|}{r}$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 80{,}0 = 9{,}00 \cdot 10^9 \frac{|Q|}{r^2} \\ 120 = 9{,}00 \cdot 10^9 \frac{|Q|}{r} \end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, se obtiene:

$$\frac{120}{80{,}0} = \frac{\frac{\cancel{9{,}00 \cdot 10^9 |Q|}}{r}}{\frac{\cancel{9{,}00 \cdot 10^9 |Q|}}{r^2}} = r$$

r = 1,50 m

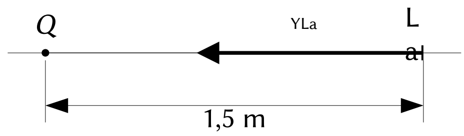
Despejando el valor absoluto de la carga $|Q|$ de la segunda ecuación:

$$|Q| = \frac{120\ [\text{V}] \cdot r}{9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}]} = \frac{120\ [\text{V}] \cdot 1{,}50\ [\text{m}]}{9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}]} = 2{,}00 \cdot 10^{-8}\ \text{C}$$

El potencial es negativo, por tanto, la carga debe ser negativa:

$$Q = -2{,}00 \cdot 10^{-8} \text{ C} = -20{,}0 \text{ nC}$$

Como el campo en el punto A va en el sentido negativo del eje X, $\overline{\boldsymbol{E}}_A = -80{,}0\ \bar{\mathbf{i}}$ (N/C), el punto tiene que estar en el semieje positivo:



$$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (1{,}50,\ 0) \text{ m}$$

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

b) Para calcular el potencial del punto B, primero se debe calcular la distancia del punto B a la carga Q.

$$r_{OB} = \sqrt{(2{,}00\ [\text{m}])^2 + (2{,}00\ [\text{m}])^2} = 2{,}83 \text{ m}$$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto B:

$$V_B = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{|-2{,}00 \cdot 10^{-8}\ [\text{C}]|}{2{,}83\ [\text{m}]} = -63{,}6 \text{ V}$$

Se calcula el trabajo realizado por la fuerza del campo:

$$W_{B\longrightarrow A} = q\,(V_B - V_{La}) = -1{,}60 \cdot 10^{-19}\ [\text{C}] \cdot (-63{,}6 - (-120))\ [\text{V}] = -9{,}02 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Análisis: Para una carga positiva, el trabajo del campo sería positivo porque el desplazamiento va en el sentido de potencial creciente, acercándose a la carga. Pero como la carga es negativa, el trabajo también lo es.

7. Una coleccionista de monedas utiliza una lupa de distancia focal 5 cm para examinarlas de cerca.
   a) Calcula la distancia a la que tiene situar las monedas respecto de la lupa si quiere observarlas con un tamaño diez veces mayor.
   b) Representa aproximadamente el correspondiente diagrama de rayos e indica las posiciones y las características del objeto y de la imagen.

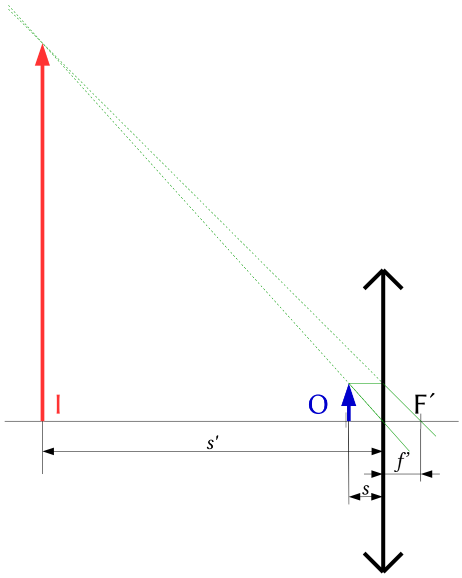
(A.B.A.U. ord. 24)

Rta.: a) $s = -4{,}5$ cm.

Datos (convenio de signos DIN)	***Cifras significativas: 2***
Aumento lateral	$A_L = 10$
Distancia focal de la lente	$f = 5{,}0 \text{ cm} = 0{,}050 \text{ m}$
Incógnitas	
Posición del objeto	s
Otros símbolos	
Tamaño de la imagen	y'
Ecuaciones	
Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes	$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$
Aumento lateral en las lentes	$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$

Solución:

Como la lente es convergente, la distancia focal es positiva: f = 0,050
Como la imagen es virtual, el aumento lateral es posittivo.
Se calcula la relación entre la distancia objeto y la distancia imagen con la ecuación del aumento lateral.



$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = 10 \Rightarrow s' = 10\ s$$

Se sustituyen los datos en la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{10\,s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}050\,[\mathrm{m}]}$$

Se calcula la distancia del objeto, despejando:

$$\frac{1}{10\,s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\,s} - \frac{10}{10\,s} = \frac{-9}{10\,s} = \frac{1}{0{,}050\,[\mathrm{m}]}$$

$$s = \frac{-9 \cdot 0{,}050\,[\mathrm{m}]}{10} = -0{,}045\ \mathrm{m} = -4{,}5\ \mathrm{cm}$$

Se dibuja un esquema de lente convergente (una línea vertical rematada por dos puntas de flechas) y se sitúa el foco F′ a la derecha de la lente.
Se dibuja, a su izquierda, una flecha vertical hacia arriba, que representa al objeto O.
Desde el punto superior del objeto se dibujan dos rayos:

- Uno, hacia el centro de la lente. La atraviesa sin desviarse.
- Otro, horizontal hacia la lente, que la atraviesa y se refracta.
  Se dibuja de forma que el rayo refractado pase por el foco de la derecha F′.

El punto de corte es el correspondiente a la punta de la imagen I. Se dibuja una flecha vertical en ese punto.

Análisis: El resultado del cálculo está en consonancia con el dibujo.

8. Marie Curie recibió el Premio Nobel de Química en 1911 por el descubrimiento del radio. Si se hubiesen guardado ese año en su laboratorio 2,00 g de radio-226, calcula:
   a) La cantidad de radio que quedaría y la actividad de la muestra en la actualidad.
   b) Los años que pasarían hasta que la muestra de radio se redujese al 1 % de su valor inicial.
   DATOS: N_A = 6,02×10²³ partículas·mol⁻¹; tiempo de semidesintegración del radio = 1,59×10³ años.
   (A.B.A.U. ord. 24)

   Rta.: a) m = 1,90 g; A = 7,01·10¹⁰ Bq; b) t = 1,06·10⁴ años.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período de semidesintegración	$T_{½}$ = 1,59·10³ años = 5,02·10¹⁰ s
Masa inicial de la muestra	m_0 = 2,00 g
Tiempo para calcular la actividad	t = 2024 −1911 = 113 años
Porcentaje que quedaría en uno cierto tiempo	r = 1,00 %
Masa atómica del ^{226}Ra	M = 226 g/mol
Número de Avogadro	N_A = 6,02 ·10²³ mol⁻¹
Incógnitas	
Masa (cantidad?) de radio que quedaría en la actualidad.	m
Actividad de la muestra en la actualidad	A
Tiempo hasta que la muestra de radio se redujera al 1 % de su valor inicial	t
Otros símbolos	
Constante de desintegración radiactiva	λ
Ecuaciones	
Ley de la desintegración radiactiva	$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
Relación entre período de semidesintegración y constante de desintegración	$T_{½} \cdot \lambda = \ln 2$
Actividad radiactiva	$A = -\mathrm{d}\,N / \mathrm{d}\,t = \lambda \cdot N$

Solución:

a) Se puede calcular el número de átomos a partir de la expresión de la actividad radiactiva.

La ley de desintegración radiactiva, que dice que la cantidad de átomos que se desintegran en la unidad de tiempo es proporcional al número de átomos presentes, ($-\text{d}N = \lambda \cdot N \cdot \text{d}t$), puede expresarse como:

$$N = N_0 \cdot \text{e}^{-\lambda \cdot t}$$

N es la cantidad de átomos que quedan sin desintegrar al cabo de un tiempo t, N_0 es la cantidad inicial de átomos y λ es la constante de desintegración.
Se obtiene una versión más manejable de la ecuación de desintegración radiactiva, $N = N_0 \cdot \text{e}^{-\lambda \cdot t}$, pasando N_0 al otro miembro, aplicando logaritmos neperianos y cambiando el signo:

$$-\ln (N / N_0) = \ln (N_0 / N) = \lambda \cdot t$$

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Cuando $t = T_{1/2}$, $N = N_0 / 2$.
Poniendo en la ecuación logarítmica: ($2N$) en lugar de N_0, y $T_{1/2}$ en vez de t, queda:

$$\ln (2\,N / N) = \lambda \cdot T_{1/2} \qquad \Rightarrow \lambda \cdot T_{1/2} = \ln 2$$

Se calcula el período de semidesintegración en segundos:

$$T_{1/2} = 1{,}59 \cdot 10^3 \text{ [anos]} \frac{365{,}25 \text{ [días]}}{1 \text{ [año]}} \frac{24{,}0 \text{ [h]}}{1 \text{ [día]}} \frac{3600 \text{ [s]}}{1 \text{ [h]}} = 5{,}02 \cdot 10^{10} \text{ s}$$

Se calcula la constante λ de desintegración radiactiva, a partir del período de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{5{,}02 \cdot 10^{10} \text{ [s]}} = 1{,}38 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

Se deduce la ley de la desintegración radiactiva en función de la masa.
Como la masa, m, es proporcional a la cantidad de átomos, N: ($m = N \cdot M / N_A$), se puede obtener una expresión similar a la ley de desintegración, $N = N_0 \cdot \text{e}^{-\lambda \cdot t}$, multiplicando ambos miembros por (M / N_A):

$$N \cdot \frac{M}{N_A} = N_0 \cdot \frac{M}{N_A} e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad m = m_0 \cdot \text{e}^{-\lambda \cdot t}$$

N_A es el número de Avogadro y M es la masa atómica del elemento.
Se calcula el tiempo transcurrido desde el descubrimiento del rayo:

$$t = (2024 - 1911) \text{ [años]} \frac{365{,}25 \text{ [días]}}{1 \text{ [año]}} \frac{24{,}0 \text{ [h]}}{1 \text{ [día]}} \frac{3600 \text{ [s]}}{1 \text{ [h]}} = 3{,}57 \cdot 10^9 \text{ s}$$

Se calcula la masa actual de la muestra:

$$m = m_0 \cdot \text{e}^{-\lambda \cdot t} = 2{,}00 \text{ [g]} \cdot \text{e}^{-1{,}38 \cdot 10^{-11} [\text{s}^{-1}] \cdot 3{,}57 \cdot 10^9 [\text{s}]} = 1{,}90 \text{ g}$$

Análisis: 113 *años son menos de* la 1/10 de *período de semidesintegración, por lo que la masa que debe quedar debe ser un poco menor que la inicial* (2 g)*, lo que está de acuerdo con el resultado.*
La actividad radioactiva es el número de átomos que se desintegran en un segundo. Es proporcional a la cantidad de sustancia radioactiva, siendo λ, la constante radioactiva, característica de cada isótopo.

$$A = \frac{-\text{d}\,N}{\text{d}\,t} = \lambda \cdot N$$

Se calcula el número de átomos actual con el número de Avogadro:

$$N = \frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{1{,}90 \text{ [g]}}{226 \text{ [g/mol]}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ [átomos/mol]} = 5{,}07 \cdot 10^{21} \text{ átomos}$$

Se calcula la actividad radiactiva, que es proporcional a la cantidad de átomos:

$$A = \lambda \cdot N = 1{,}38 \cdot 10^{-11} \text{ [s}^{-1}] \cdot 5{,}07 \cdot 10^{21} \text{ [átomos]} = 7{,}01 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

b) Si la cantidad que queda en un tiempo es el 1 % de la inicial, se puede calcular ese tiempo con la expresión logarítmica de la ley de desintegración radiactiva:

$$\ln (N_0 / N) = \lambda \cdot t \Rightarrow \; t = \frac{\ln(N/N_0)}{\lambda} = \frac{\ln(0{,}01 \text{ N / N})}{\lambda} = \frac{\ln 0{,}01}{1{,}38 \cdot 10^{-11} \text{ [s}^{-1}]} = 3{,}33 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

Se puede calcular ese tiempo en años:

$$t=3{,}33\cdot 10^{11}\ [\mathrm{s}]\frac{1\ [\mathrm{h}]}{3600\ [\mathrm{s}]}\frac{1\ [\text{día}]}{24{,}0\ [\mathrm{h}]}\frac{1\ [\text{año}]}{365{,}25\ [\text{días}]}=1{,}06\cdot 10^{4}\ \text{años}$$

Análisis: El 1 % (= 0,01) *está comprendido entre* $(1/2)^6 = 1/64 = 0{,}016$ *y* $(1/2)^7 = 1/128 = 0{,}08$, *por lo que deberán transcurrir más de* 6 *períodos* ($6 \cdot 1{,}59\cdot10^3 \approx 9{,}5\cdot10^3$ *años), pero menos de 7,* ($\approx 1{,}1\cdot10^4$ *años). El resultado calculado cumple estos requisitos.*

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, y del traductor de la CIXUG.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM).
Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 16/07/24